Ecuación del resorte

Movimiento oscilatorio libre no amortiguado

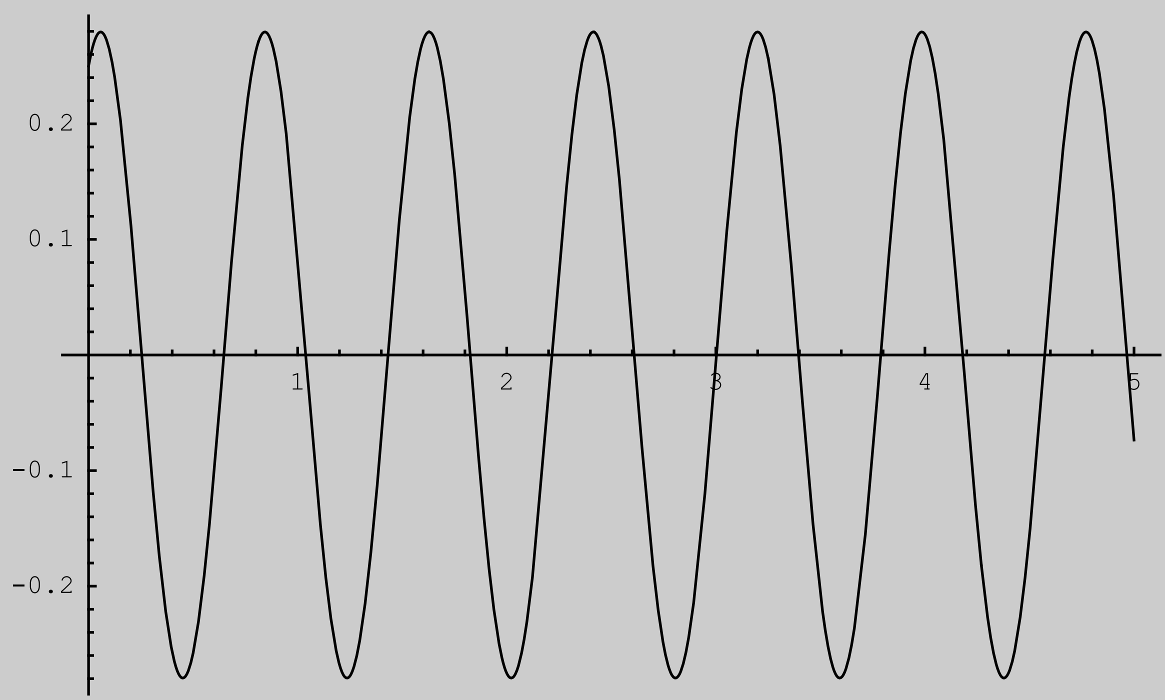
Un peso de 8 lb se coloca en el extremo inferior de un resorte helicoidal que está suspendido del techo. El peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio,por esta razón está estirado 6 pulg. Después,el peso se empuja 3 pulg hacia abajo de su posición de equilibrio y se suelta en con una velocidad inicial de 1 ft/seg, dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que ninguna fuerza externa está presente determine la amplitud,periodo y frecuencia del movimiento resultante.

```
Clear[t, x]
DifEq = {8/32 * x''[t] + 16 * x[t] == 0, x[0] == .25, x'[0] == 1}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 5}]
```

$$\left\{16\,x[t] + \frac{x''[t]}{4} == 0,\ x[0] == 0.25,\ x'[0] == 1\right\}$$

```
{{x[t] → 0.25 Cos[8 t] + 0.125 Sin[8 t]}}
```

```
0.25 Cos[8 t] + 0.125 Sin[8 t]
```



- Graphics -

Movimiento oscilatorio amortiguado

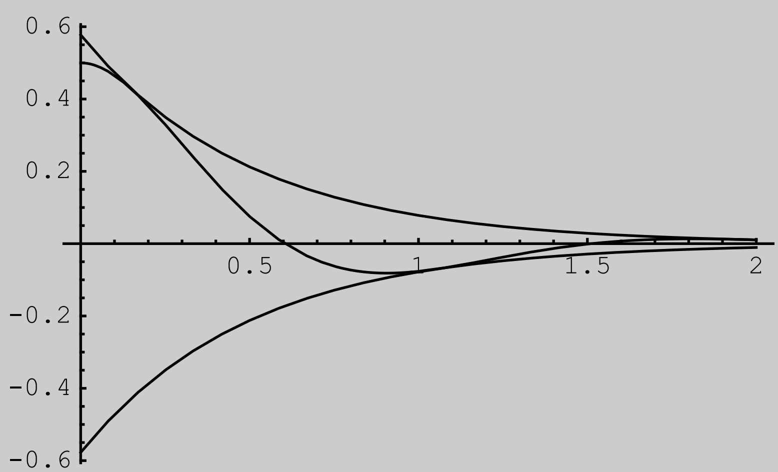
Un peso de 32 lb está unido al extremo inferior de un resorte que está suspendido del techo.El peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y el resorte está estirado 2 ft.Después,el peso se desplaza 6 pulg hacia abajo de su posición de equilibrio y se suelta en t = 0.Ninguna fuerza externa actúa;sin embargo,la resistencia del medio en libras es numéricamente igual a 4(dx/dt),donde es la velocidad instantánea en ft/seg. Determine el movimiento resultante del peso en el resorte

```
Clear[t, x]
DifEq = {x''[t] + 4 * x'[t] + 16 * x[t] == 0, x[0] == .5, x'[0] == 0}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf =
 Plot[{f[t], Sqrt[3]/3 * Exp[-2 t], -Sqrt[3]/3 * Exp[-2 t]}, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]
```

$\{16\,x[t] + 4\,x'[t] + x''[t] == 0,\ x[0] == 0.5,\ x'[0] == 0\}$

$\{\{x[t] \to e^{-2.\,t}\,(0.5\,\mathrm{Cos}[3.4641\,t] + 0.288675\,\mathrm{Sin}[3.4641\,t])\}\}$

$e^{-2.\,t}\,(0.5\,\mathrm{Cos}[3.4641\,t] + 0.288675\,\mathrm{Sin}[3.4641\,t])$



- Graphics -

Movimiento críticamente amortiguado

3. Determine el movimiento del peso del resorte del ejemplo anterior

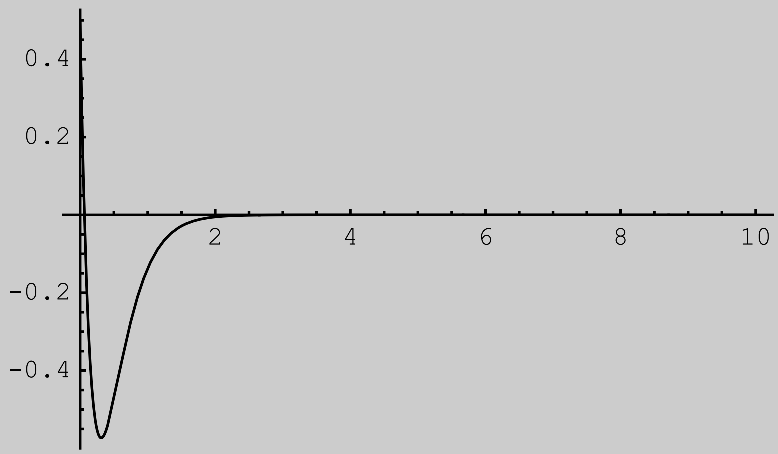
si la resistencia del medio en libras es 8(dx/dt)

```
Clear[t, x]
DifEq = {x''[t] + 8 * x'[t] + 16 * x[t] == 0, x[0] == .5, x'[0] == -10}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 10}, PlotRange → All]
```

$\{16\,x[t] + 8\,x'[t] + x''[t] == 0,\ x[0] == 0.5,\ x'[0] == -10\}$

$\{\{x[t] \to e^{-4t}(0.5 - 8.\,t)\}\}$

$e^{-4t}(0.5 - 8.\,t)$



- Graphics -

Movimiento sobreamortiguado

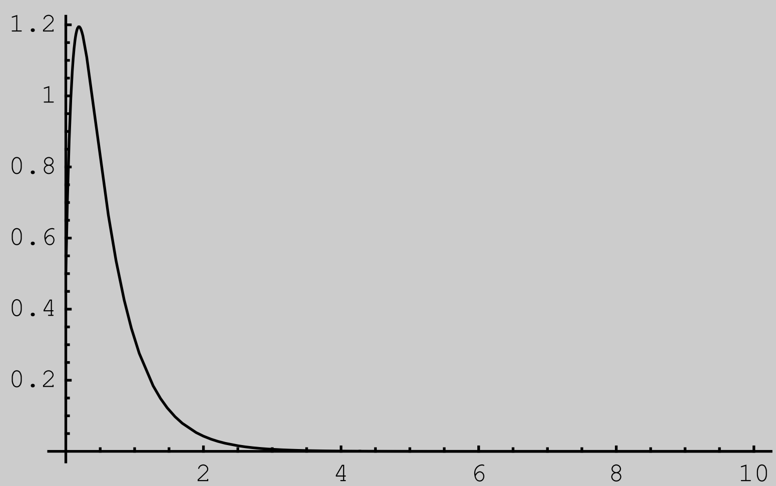
4. Determine el movimiento del peso del resorte del ejemplo anterior si la resistencia del medio en libras es 10(dx/dt)

```
Clear[t, x]
DifEq = {x''[t] + 10 * x'[t] + 16 * x[t] == 0, x[0] == .5, x'[0] == 10}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 10}, PlotRange → All]
```

```
{16 x[t] + 10 x'[t] + x''[t] == 0, x[0] == 0.5, x'[0] == 10}
```

$\{\{x[t] \to e^{-8t}(-1.83333 + 2.33333\, e^{6t})\}\}$

$e^{-8t}(-1.83333 + 2.33333\, e^{6t})$




```
- Graphics -
```

Movimiento forzado amortiguado

5. Un peso de 16 lb está unido al extremo inferior de un resorte que está suspendido del techo,la constante del resorte es de 10 lb/ft.El peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio.Al empezar en t = 0 se aplica al sistema una fuerza externa dada por f(t)=5-cos(2t).Determine el movimiento resultante si la fuerza de amortiguamiento en libras es numéricamente igual a 2(dx/dt),donde dx/dt

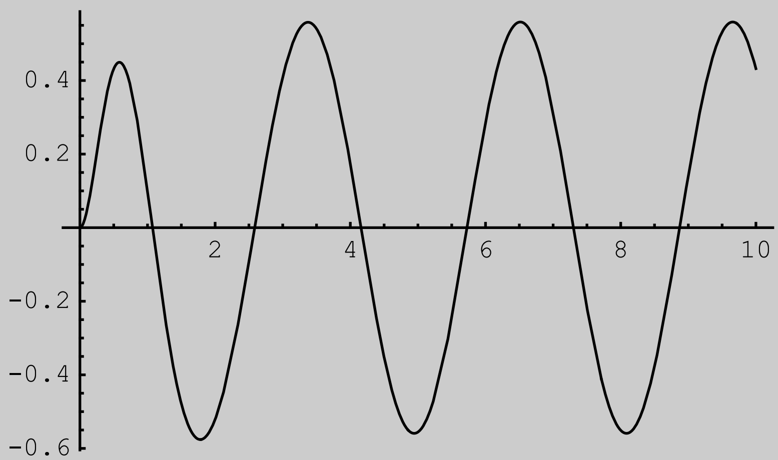
es la velocidad instantánea en ft/seg

```
Clear[t, x]
DifEq = {1/2 * x''[t] + 2 x'[t] + 10 x[t] == 5 * Cos[2 * t], x[0] == 0, x'[0] == 0}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 10}, PlotRange → All]
```

$$\left\{10\, x[t] + 2\, x'[t] + \frac{x''[t]}{2} == 5\, \mathrm{Cos}[2\, t],\ x[0] == 0,\ x'[0] == 0\right\}$$

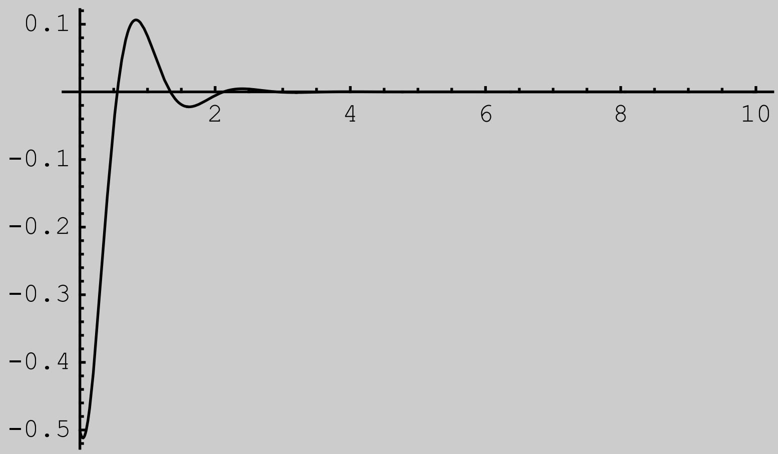
$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{4}\, e^{-2\, t} \left(2\, e^{2\, t}\, \mathrm{Cos}[2\, t] - 2\, \mathrm{Cos}[4\, t] + e^{2\, t}\, \mathrm{Sin}[2\, t] - \frac{3}{2}\, \mathrm{Sin}[4\, t]\right)\right\}\right\}$$

$$\frac{1}{4}\, e^{-2\, t} \left(2\, e^{2\, t}\, \mathrm{Cos}[2\, t] - 2\, \mathrm{Cos}[4\, t] + e^{2\, t}\, \mathrm{Sin}[2\, t] - \frac{3}{2}\, \mathrm{Sin}[4\, t]\right)$$

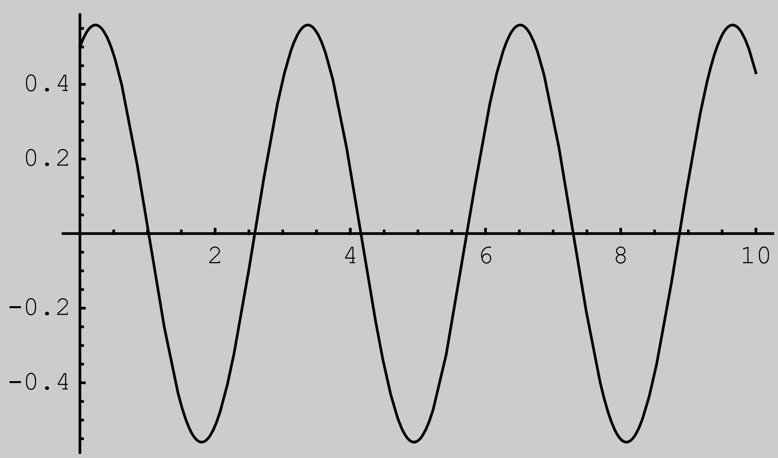


- Graphics -

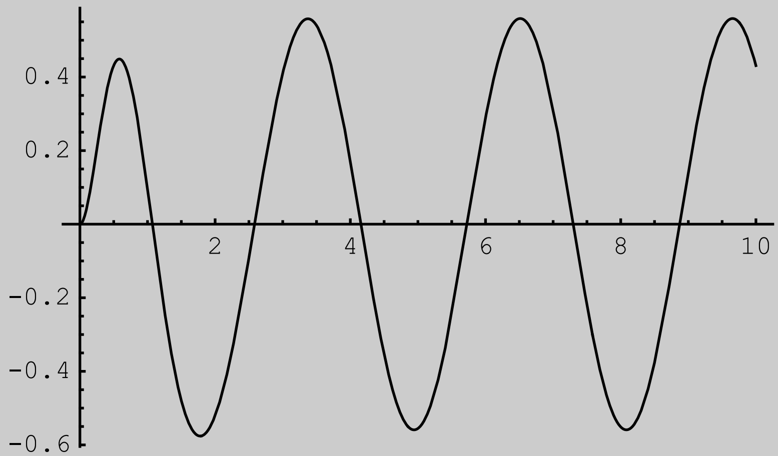
```
Plot[(-5/8) * Exp[-2 * t] * (Cos[4 t - 0.64]), {t, 0, 10}, PlotRange → All]
Plot[(√5/4) * (Cos[2 t - 0.46]), {t, 0, 10}, PlotRange → All]
Plot[(-5/8) * Exp[-2 * t] * (Cos[4 t - 0.64]) + (√5/4) * (Cos[2 t - 0.46]),
  {t, 0, 10}, PlotRange → All]
```



- Graphics -



- Graphics -



- Graphics -

Resonancia

6. Un peso de 64 lb está unido al extremo inferior de un resorte que está suspendido del techo,la constante del resorte es de 18 lb/ft.El peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio;después se desplaza 6 pulg debajo de esta posición de equilibrio y se suelta en t = 0. En este instante se aplica al sistema una fuerza externa dada por f(t)=3cos(wt).

a) Suponiendo que la fuerza de amortiguamiento en libras es numéricamente igual a 4(dx/dt), donde dx/dt es la velocidad instantánea en ft/seg,determine la frecuencia de resonancia del movimiento resultante.

b) Suponiendo que no existe amortiguamiento,determine el valor de w que da lugar a una resonancia no amortiguada

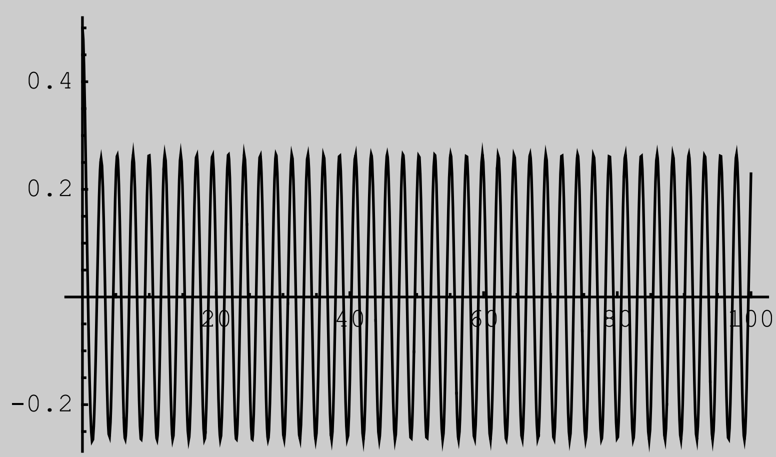
```
Clear[t, x]
ω = √7
DifEq = {2 * x''[t] + 4 * x'[t] + 18 x[t] == 3 * Cos[ω * t], x[0] == .5, x'[0] == 0}
Simplify[DSolve[DifEq, x[t], t]]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 100}, PlotRange → All]
```

$\sqrt{7}$

$\{18\,x[t] + 4\,x'[t] + 2\,x''[t] == 3\,\mathrm{Cos}[\sqrt{7}\,t],\ x[0] == 0.5,\ x'[0] == 0\}$

$$\{\{x[t] \to (0.40625 - 1.7415\times10^{-18}\,i)\,e^{-t}\,\mathrm{Cos}[2\sqrt{2}\,t] + (0.09375 - 5.56501\times10^{-18}\,i)\,\mathrm{Cos}[\sqrt{7}\,t] - (0.0883883 - 8.85488\times10^{-18}\,i)\,e^{-t}\,\mathrm{Sin}[2\sqrt{2}\,t] + (0.248039 + 3.08998\times10^{-18}\,i)\,\mathrm{Sin}[\sqrt{7}\,t]\}\}$$

$$(0.40625 - 1.7415\times10^{-18}\,i)\,e^{-t}\,\mathrm{Cos}[2\sqrt{2}\,t] + (0.09375 - 5.56501\times10^{-18}\,i)\,\mathrm{Cos}[\sqrt{7}\,t] - (0.0883883 - 8.85488\times10^{-18}\,i)\,e^{-t}\,\mathrm{Sin}[2\sqrt{2}\,t] + (0.248039 + 3.08998\times10^{-18}\,i)\,\mathrm{Sin}[\sqrt{7}\,t]$$



- Graphics -

```
Clear[t, x]
DifEq = {x''[t] + 9 x[t] == 3/2 * Cos[ω * t]}
Simplify[DSolve[DifEq, x[t], t]]
```

$$\left\{9\,x[t] + x''[t] == \frac{3}{2}\,\mathrm{Cos}[t\,\omega]\right\}$$

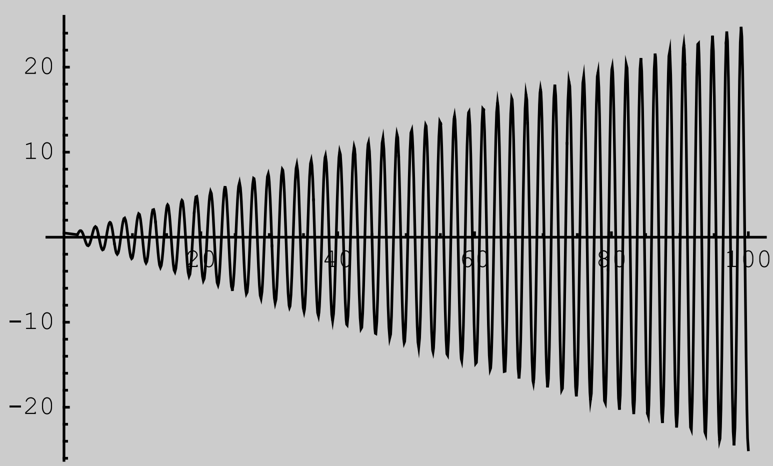
$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{4\left(-9+\omega^2\right)}\left(4\left(-9+\omega^2\right)C[2]\,\mathrm{Cos}[3\,t] - 6\,\mathrm{Cos}[t\,\omega] - 4\left(-9+\omega^2\right)C[1]\,\mathrm{Sin}[3\,t]\right)\right\}\right\}$$

```
Clear[t, x]
DifEq = {x''[t] + 9 * x[t] == (3 / 2) * Cos[3 * t], x[0] == .5, x'[0] == 0}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 100}]
```

$$\left\{9\,x[t] + x''[t] == \frac{3}{2}\,\mathrm{Cos}[3\,t],\ x[0] == 0.5,\ x'[0] == 0\right\}$$

{{x[t] → 0.0833333 (6. Cos[3. t] + 3. t Sin[3. t])}}

0.0833333 (6. Cos[3. t] + 3. t Sin[3. t])



- Graphics -

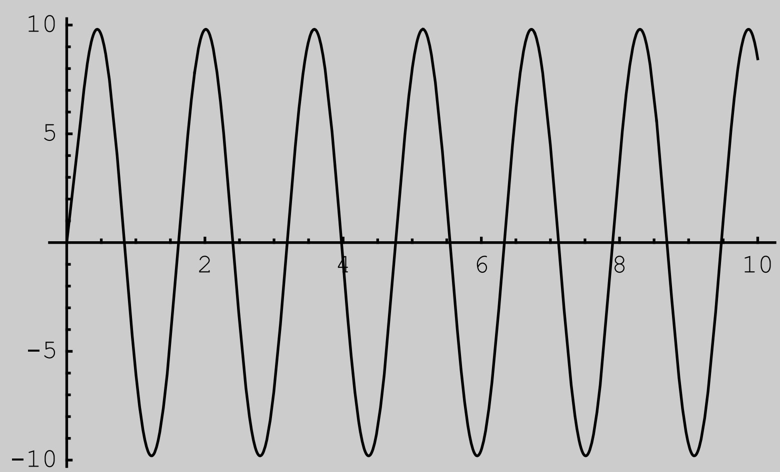
7. Un circuito tiene en serie una fuerza electromotriz dada por V = 100 sen (40 t) volts, un resistor de 10 ohms y un inductor de 0.5 H. Si la corriente inicial es 0, determine la corriente en el instante t > 0

```
Clear[t, x]
DifEq = {x''[t] + 9 * x[t] == (3 / 2) * Cos[3 * t], x[0] == .5, x'[0] == 0}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 100}]
```

```
{10 i[t] + 0.5 i'[t] == 100 Sin[4 t], i[0] == 0}
```

$$\{\{i[t] \to e^{-20.\,t}\,((1.92308 - 4.27176\times10^{-17}\,i)\,e^{0.\,i\,t} - (1.92308 - 4.27176\times10^{-17}\,i)\,e^{(20.+0.\,i)\,t}\,\mathrm{Cos}[4.\,t] + (9.61538 + 2.66931\times10^{-16}\,i)\,e^{(20.+0.\,i)\,t}\,\mathrm{Sin}[4.\,t])\}\}$$

$$e^{-20.\,t}\,((1.92308 - 4.27176\times10^{-17}\,i)\,e^{0.\,i\,t} - (1.92308 - 4.27176\times10^{-17}\,i)\,e^{(20.+0.\,i)\,t}\,\mathrm{Cos}[4.\,t] + (9.61538 + 2.66931\times10^{-16}\,i)\,e^{(20.+0.\,i)\,t}\,\mathrm{Sin}[4.\,t])$$



- Graphics -

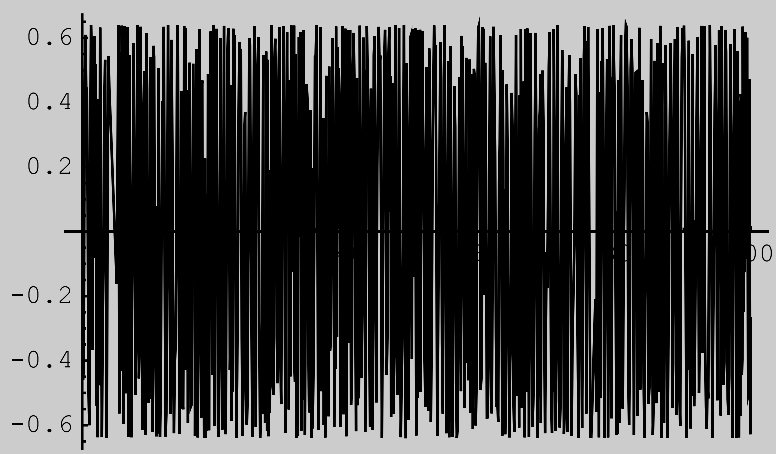
8. Un circuito tiene en serie una fuerza electromotriz dada por V = 100 sen (60 t), un resistor de 2 ohms y un inductor de 0.1 henry y un capacitor de 1 / 260 faradios. Si la corriente inicial y la carga inicial son 0, determine la carga en el capacitor en cualquier tiempo t > 0

```
Clear[t, x]
DifEq =
  {x''[t] + 20 * x'[t] + 2600 x[t] == (1000) * Sin[60 * t], x[0] == 0, x'[0] == 0}
DSolve[DifEq, x[t], t]
f[t_] = x[t] /. %[[1]]
    graf = Plot[f[t], {t, 0, 100}]
```

{2600 x[t] + 20 x′[t] + x″[t] == 1000 Sin[60 t], x[0] == 0, x′[0] == 0}

$$\left\{\left\{x[t] \to -\frac{1}{122} e^{-10t} \left(-60 \,\mathrm{Cos}[50 t] + 61 e^{10t} \mathrm{Cos}[10 t] \,\mathrm{Cos}[50 t] - e^{10t} \mathrm{Cos}[50 t] \,\mathrm{Cos}[110 t] + 61 e^{10t} \mathrm{Cos}[50 t] \,\mathrm{Sin}[10 t] - 72 \,\mathrm{Sin}[50 t] + 61 e^{10t} \mathrm{Cos}[10 t] \,\mathrm{Sin}[50 t] + 11 e^{10t} \mathrm{Cos}[110 t] \,\mathrm{Sin}[50 t] - 61 e^{10t} \mathrm{Sin}[10 t] \,\mathrm{Sin}[50 t] - 11 e^{10t} \mathrm{Cos}[50 t] \,\mathrm{Sin}[110 t] - e^{10t} \mathrm{Sin}[50 t] \,\mathrm{Sin}[110 t]\right)\right\}\right\}$$

$$-\frac{1}{122} e^{-10t} \left(-60 \,\mathrm{Cos}[50 t] + 61 e^{10t} \mathrm{Cos}[10 t] \,\mathrm{Cos}[50 t] - e^{10t} \mathrm{Cos}[50 t] \,\mathrm{Cos}[110 t] + 61 e^{10t} \mathrm{Cos}[50 t] \,\mathrm{Sin}[10 t] - 72 \,\mathrm{Sin}[50 t] + 61 e^{10t} \mathrm{Cos}[10 t] \,\mathrm{Sin}[50 t] + 11 e^{10t} \mathrm{Cos}[110 t] \,\mathrm{Sin}[50 t] - 61 e^{10t} \mathrm{Sin}[10 t] \,\mathrm{Sin}[50 t] - 11 e^{10t} \mathrm{Cos}[50 t] \,\mathrm{Sin}[110 t] - e^{10t} \mathrm{Sin}[50 t] \,\mathrm{Sin}[110 t]\right)$$



- Graphics -